Exercices d'algèbre 1

Mode d'emploi :

- bon nombre d'exercices ne seront pas traités en TD.
- les exercices précédés de "Tous TD" ou "Cours" doivent être faits dans tous les groupes de TD.
- les résultats des exercices précédés de "Cours" sont à connaître et peuvent être utilisés directement lors des contrôles, comme s'ils figuraient dans le cours.
- les exercices précédés de (∗) sont en général assez faciles et doivent être préparés à la maison. C'est un strict minimum et il est conseillé de préparer également d'autres exercices.
- il faut apprendre son cours avant d'essayer de faire les exercices ; d'autre part, il est plus formateur de comprendre à fond quelques exercices que d'en comprendre beaucoup à moitié.

1 Exercices sur la logique et énigmes

Exercice 1.1 (∗) (sens et négation du OU et du ET)

Jean est blond et Julie est brune. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, puis les nier.

1. Jean est brun ou Jean est blond.
2. Jean est roux et Julie est brune.
3. Jean n'est pas blond ou Julie est brune.
4. Il n'est pas vrai que Jean n'est pas blond.

Exercice 1.2 (∗) (négation du OU et du ET) Soit x un réel. Nier les propositions suivantes :

1. $x = 1$ ou $x = -1$
2. $0 \leq x \leq 1$ (ce qui veut dire par définition : $0 \leq x$ et $x \leq 1$)
3. $x = 0$ ou $(x^2 = 1$ et $x \geq 0)$

Exercice 1.3 (énoncés avec l'ensemble vide) Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Soit P la proposition "Pour tout réel x dans A, $x^2 \geq 12$. Nier P. On suppose maintenant que $A = \emptyset$. La négation de P est-elle vraie ou fausse ? P est-elle vraie ou fausse ?

Exercice 1.4 (∗) (négation d'énoncés avec quantificateurs) Nier, en français courant, les propositions suivantes :

1. Il y a au moins un étudiant qui aime le tennis.
2. Tous les étudiants aiment lire.
3. Dans toutes les matières, il y a au moins un étudiant qui travaille régulièrement.
4. Il y a au moins un étudiant qui, dans toutes les matières, travaille régulièrement .

Exercice 1.5 (propriétés du OU et du ET) Soient A, B, C, D des propositions. Montrer que :

(A ou B) et (C ou D) est équivalent à (A et C) ou (A et D) ou (B et C) ou (B et D)

Application : trouver les couples de réels (x, y) tels que :

$$\begin{cases} (x-1)(y-2) = 0 \\ (x-2)(y-3) = 0 \end{cases}$$

Exercice 1.6 (Tous TD) (compréhension et négation d'implications) Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, et les nier.

1. Pour tout réel x, si $x \geq 3$ alors $x^2 \geq 5$
2. Pour tout entier naturel n, si $n > 1$ alors $n \geq 2$
3. Pour tout réel x, si $x > 1$ alors $x \geq 2$
4. Pour tout réel x, $x^2 \geq 1$ est équivalent à $x \geq 1$

(pour le 4., on pourra se rappeler qu'une équivalence est une double implication)

Exercice 1.7 ($*$) (ordre des quantificateurs, importance de l'ensemble auquel appartiennent les éléments) Les propositions suivantes sont elles vraies ou fausses ?

1. Pour tout entier naturel n, il existe un réel x tel que $x > 2n$
2. Il existe un réel x tel que, pour tout entier naturel n, $x > 2n$
3. Pour tout réel x, pour tout réel y, si $x^2 = y^2$ alors $x = y$.
4. Pour tout réel positif x, pour tout réel positif y, si $x^2 = y^2$ alors $x = y$.

Exercice 1.8 (Tous TD) (implications) Donner la réciproque et la contraposée des implications suivantes (x est un réel, n un entier naturel)..

1. Si le père Noël existe alors Noël est en juillet
2. Si $x \geq 3$, alors $x + 2 \geq 5$.
3. Si $n \geq 1$ alors $n^2 > n$.

Exercice 1.9 (Tous TD) Soit F l'ensemble des femmes. On note $P(x, y)$ l'expression "x est la fille de y", où x et y sont des femmes. Ecrire les formules suivantes dans le langage des ensembles puis en écriture formalisée, puis les nier en écriture formalisée (voir exemple ci-dessous).

1. Toute femme a au moins une fille.
2. Il y a au moins une femme qui a au moins une fille.
3. Toute femme a au moins une mère.
4. Il y a au moins une femme qui n'a aucune fille.

Par exemple, la première proposition s'écrit "pour tout y dans F, il existe x dans F tel que x est la fille de y" dans le langage des ensembles, et $\forall y \in F, \exists x \in F, P(x, y)$ en écriture formalisée. Sa négation en écriture formalisée est : $\exists y \in F, \forall x \in F, non P(x, y)$

Exercice 1.10 (compréhension d'énoncés avec quantificateurs, importance de l'ordre). A l'université Deuxphine, il n'y a que deux étudiants : Jean et Julie, et trois matières : algèbre, analyse et économie. Les résultats des étudiants sont les suivants.

	Algèbre	Analyse	Economie
Jean	12	5	16
Julie	14	15	7

Soit $E = \{$Jean, Julie$\}$ l'ensemble des étudiants. Soit $F = \{$algèbre, analyse, économie$\}$ l'ensemble des matières. Pour tout x dans E et tout y dans F, on désigne par $P(x, y)$ l'expression : "l'étudiant x a la moyenne (10 ou plus) dans la matière y".

Oralement, exprimer en français courant les propositions suivantes. Dire en justifiant si elles sont vraies ou fausses.

1. $\forall x \in E, \forall y \in F, P(x,y)$
2. $\exists x \in E, \exists y \in F, P(x,y)$
3. $\exists x \in E, \forall y \in F, P(x,y)$
4. $\forall y \in F, \exists x \in E, P(x,y)$
5. $\exists y \in F, \forall x \in E, \text{non}P(x,y)$
6. $\exists y \in F, \forall x \in E, P(x,y)$

Par exemple, la première proposition se lit “Pour tout élément x de E, pour tout élément y de F, x a la moyenne dans la matière y". En français courant, on dirait “Tous les étudiants ont la moyenne dans toutes les matières". C'est faux, puisque Jean n'a pas la moyenne en analyse.

Exercice 1.11 (Cours) Soit a un réel. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

P : Si (pour tout réel strictement positif ε, on a $|a| < \varepsilon$) alors $a = 0$

Q : (Il existe un réel strictement positif ε tel que $|a| \geq \varepsilon$) ou $a = 0$

R : Si $a \neq 0$ alors (il existe un réel strictement positif ε tel que $|a| \geq \varepsilon$)

Montrer que R est vraie. En déduire que P et Q sont vraies.

Exercice 1.12 Donner, en français courant, un exemple de ou inclusif et un exemple de ou exclusif. En mathématiques, le ou est-il inclusif ou exclusif ?

Exercice 1.13 Soit E un ensemble. Soient $P(x)$ (respectivement, $Q(x)$) un énoncé qui, pour toute valeur donnée à x dans E, est soit vrai soit faux. Démontrer les propriétés suivantes :

1) $(\forall x \in E, P(x) \text{ ou } \forall x \in E, Q(x)) \Rightarrow \forall x \in E, (P(x) \text{ ou } Q(x))$.

2) S'il existe x dans E tel que ($P(x)$ ou $Q(x)$) alors (il existe x dans E tel que $P(x)$ ou il existe x dans E tel que $Q(x)$)

Les réciproques de ces propriétés sont-elles vraies ?

Exercice 1.14 (Tous TD) *(Un problème courant dans la rédaction des récurrences)* Supposons qu'on veuille démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $2^n \leq 3^n$. Corrigez la rédaction suivante :

Soit P(n) la propriété : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \leq 3^n$. P(0) est vraie car blah blah. Soit n dans $\mathbb{N}$. Supposons P(n) vraie. Alors blah blah blah donc P($n+1$) est vraie. Donc, par récurrence, $2^n \leq 3^n$ pour tout entier naturel n.

Exercice 1.15 Une récurrence erronée. On considère des boîtes de crayons de couleurs. Pour tout entier $n \geq 1$, soit $P(n)$ la proposition : "Dans une boîte quelconque de n crayons de couleurs, tous les crayons sont de la même couleur". Le raisonnement suivant prouve-t-il que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$? Sinon, où est l'erreur ?

Dans une boîte d'un seul crayon, les crayons ont bien sûr tous la même couleur. Donc $P(1)$ est vraie.

Soit maintenant n dans $\mathbb{N}^*$. Prenons une boîte de $n+1$ crayons. Si l'on enlève provisoirement un crayon, il reste n crayons qui, d'après $P(n)$, sont tous de la même couleur. Remettons le crayons mis à l'écart et enlevons un autre crayon. Toujours d'après $P(n)$, les n crayons restants sont tous de la même couleur. Mais comme les crayons qui ne sont pas sortis de la boîte ont une couleur constante, il s'ensuit que les $n+1$ crayons ont même couleur. Donc $P(n+1)$ est vraie. Donc, par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Question subsidiaire : pour quelles valeurs de n l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est-elle vraie ?

Exercice 1.16 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1) Il existe un unique entier naturel n tel que $n^2 < 0$.
2) Il existe au plus un entier naturel n tel que $n^2 < 0$.
3) Il existe un unique entier naturel n tel que $n^2 = 1$.
4) Il existe au plus un entier naturel n tel que $n^2 = 1$.
5) Il existe un unique entier relatif n tel que $n^2 = 1$.
6) Il existe au plus un entier relatif n tel que $n^2 = 1$.

Voyage sur l'île de Puro-Pira (à faire à la maison, les solutions seront mises en ligne).

Le type d'énigme qui suit a été popularisé notamment par le logicien Raymond Smullyan, dont je vous conseille vivement les livres. Vous vous trouvez sur une île un peu étrange : l'île de Puro-Pira. Vous savez qu'à part vous, on y trouve deux catégorie de gens : les Purs, qui ne disent que des choses vraies, et les Pires, qui ne disent que des choses fausses.

Alice et Bernard sont deux habitants de l'île. Il se peut que ce soient deux Purs, deux Pires, une Pure et un Pire,... Tout est possible. De plus, les questions sont indépendantes (donc il se peut que Bernard soit un Pire dans la question 1 et un Pur dans la question 2). Sauf indication contraire, votre but est de déterminer le type des habitants que vous rencontrez. Cela ne sera pas toujours possible, mais presque. Pour vous aider, les réponses aux quatres premières questions sont données dans les notes de bas de page.

On rappelle que "Si P alors Q" veut dire "(non P) ou Q". Donc si un Pur dit "Si P alors Q", c'est que P est fausse ou Q est vraie. Si un Pire dit "Si P alors Q", c'est que P est vraie et Q est fausse. D'autre part, dans ce qui suit et comme toujours en mathématiques, le "ou" est inclusif.

Rencontre 1. Bernard vous dit : "Nous sommes tous les deux des Pires". Qu'en déduisez-vous ? [1]

Rencontre 2. Alice vous dit : "Je suis une Pure et Bernard est un Pire". Que peut-on en déduire ? [2]

Rencontre 3. Alice vous dit : "Si je suis une Pure alors Bernard est un Pire". Qu'en déduisez-vous ? [3]

Rencontre 4. Alice dit : "Je suis une Pure ou Bernard est un Pur." Bernard dit : "Nous ne sommes pas du même type." [4]

A vous de résoudre les énigmes suivantes.

Question 5 :

a) trouver une phrase que ni un Pur ni un Pire ne peut dire ;
b) trouver une phrase qui peut-être dite par un Pur mais aussi par un Pire.

---

[1] Réponse : un Pur ne pourrait pas dire ça. Donc Bernard est un Pire. Donc ce qu'il dit est faux. Donc Alice et Bernard ne sont pas tous les deux des Pires. Or Bernard est un Pire. Donc Alice est une Pure.

[2] Réponse : la seule chose que l'on puisse en déduire, c'est qu'Alice et Bernard ne sont pas tous les deux des Purs.

[3] Réponse : Alice est une Pure et Bernard est un Pire. Supposons qu'Alice soit une Pire. Alors ce qu'elle dit est vraie (rappelez-vous que si P est fausse alors nonP est vraie, donc nonP ou Q est vraie, donc par définition "si P alors Q" est vraie). Donc Alice est une Pure. Contradiction. Notre supposition initiale était donc fausse. Donc Alice est une Pure. Donc ce qu'elle dit est vraie. Donc Bernard est un Pire.

[4] Alice et Bernard sont tous les deux des Pires. En effet, supposons qu'Alice soit une Pure. Alors il y a deux cas : 1er cas, Alice et Bernard sont tous les deux des Purs. Alors Bernard dit la vérité, donc il ne peut pas dire "Nous ne sommes pas du même type". Contradiction. 2ème cas, Alice est une Pure et Bernard est un Pire. Alors Bernard ment toujours. Donc il ne peut pas dire "Nous ne sommes pas du même type", puisque c'est vrai. Contradiction. Donc supposer qu'Alice est une Pure mène à une contradiction. Donc Alice est une Pire. Donc ce qu'elle a dit est faux. Donc Alice et Bernard sont tous les deux des Pires.

Rencontre 6. Alice dit : "Je ne suis ni une Pure ni une Pire." Bernard dit : "C'est vrai !"

Rencontre 7. Chloé est une habitante de l'île de Puro-Pira.
Vous : "Est-ce que Bernard et Chloé sont tous les deux des Purs ?"
Alice : "Oui."
Vous : "Est-ce que Bernard est un Pur ?"
Alice : "Non."

Rencontre 8. Entre Alice, Bernard et Chloé, l'un des trois est le chef du village.
Alice : "C'est moi le chef."
Bernard : "C'est moi le chef."
Chloé : "Au plus l'un de nous trois dit la vérité."
Qui est le chef ?

Question 9 (difficile). Sur l'île des Purs et des Pires, on a volé un cheval. Il y a 4 suspects (dont un et un seul est coupable) : Alice, Bernard, Chloé et David. Les 3 premiers sont présents au tribunal, le 4ème, David, n'a pas encore été pris. Le juge, qui est un Pur et raisonne parfaitement, pose la question : "Qui a volé le cheval ?". Voici les réponses :
Alice : "C'est Bernard qui a volé le cheval."
Bernard : "C'est Chloé qui a volé le cheval."
Chloé : "C'est David qui a volé le cheval."
Alors, l'un des 3 accusés dit : "Les 2 autres mentent !". Le juge réfléchit et après quelques instants, il désigne l'un des 3 et lui dit : "Vous ne pouvez pas avoir volé le cheval, vous êtes libre." Qui est-ce ?

L'audience se poursuit après le départ de l'innocent. Le juge demande à l'un des 2 si l'autre est un Pur et après qu'on lui a répondu par OUI ou par NON, il sait qui a volé le cheval. Qui est-ce ?

Des Espions sur l'île de Puro-Pira.

L'île de Puro-Pira a été infiltrée par des Espions. Ceux-ci peuvent dire la vérité, mentir, dire des choses paradoxales : tout est possible. Vous savez que parmi Alice, Bernard et Chloé, il y a exactement un Pur, un Pire, et un Espion. Vous devez devinez qui est quoi.

Rencontre 10.
Alice : "Je suis une Pure."
Bernard : "Je suis un Pire."
Chloé : "Bernard n'est pas un Pur."

Rencontre 11.
Alice : "Je suis une Pure."
Bernard : "Je suis un Pire."
Chloé : "Alice est une Espionne."

Rencontre 12.
Alice : "Je suis une Pure."
Bernard : "Alice est une Pure."
Chloé : "Si vous me posiez la question, je vous dirais qu'Alice est une Espionne."

2 Ensembles, raisonnement, indices

Exercice 2.1 ($*$) Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses. Justifier.

a) $\forall x \in \mathbb{R}, (x = |x| \text{ ou } x = -|x|)$ b) $(\forall x \in \mathbb{R}, x = |x|)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}, x = -|x|)$

c) $\exists x \in \mathbb{R}, (x = |x| \text{ et } x = -|x|)$ d) $(\exists x \in \mathbb{R}, x = |x|)$ et $(\exists x \in \mathbb{R}, x = -|x|)$

e) $\exists x \in \mathbb{R}^*, (x = |x| \text{ et } x = -|x|)$ f) $(\exists x \in \mathbb{R}^*, x = |x|)$ et $(\exists x \in \mathbb{R}^*, x = -|x|)$

Exercice 2.2 ($*$) (ensembles : définitions) Soient $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{3,6,2\}$ et $C = \{1,3\}$. Calculer $A \cup B$, $B \cup C$, $A \cap B$, $B \cap C$, $C_A(B)$ et $B \backslash C$.

Exercice 2.3 *($*$)* Soient $A = \{3,5\}$, et $B = \{2,5,9\}$. Calculer $A \times B$ et $B \times A$.

Exercice 2.4 *($*$) (ensembles : définitions)* Soit $E = \{a\}$ un ensemble à un élement. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.

Exercice 2.5 *(Cours)* (propriétés des ensembles) Soient A un ensemble, et X, Y et Z des parties de A. Démontrer les propriétés suivantes : a) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$; b) $C_A(C_A(X)) = X$; c) $C_A(X \cup Y) = C_A(X) \cap C_A(Y)$; d) $X \subset Y \iff C_A(Y) \subset C_A(X)$

Exercice 2.6 (une rédaction confuse conduit à des erreurs) Que pensez-vous de la démonstration suivante ?

"Pour tout réel x, $(x-2)(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2, x \neq 1$, or x ne peut pas être égal à la fois à 2 et à 1, donc pour tout réel x, $(x-2)(x-1)$ est non nul".

Exercice 2.7 (ensembles, équivalence) Soient A et B des ensembles. Montrer que $A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$.

Exercice 2.8 *($*$)* (preuve par contraposée) Montrer par contraposée que pour tout entier naturel n, si n^2 est pair alors n est pair.

Exercice 2.9 *(Cours)* Soit x un réel positif ou nul. Montrer que si pour tout réel y strictement positif, $x \leq y$, alors $x = 0$.

Exercice 2.10 (Tous TD) (preuve par l'absurde) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer par l'absurde que n^2+1 n'est pas le carré d'un entier.

Exercice 2.11 *(Tous TD, au moins en partie)* (preuve cyclique) Soit E un ensemble. Soient A et B des parties de E. Soient $\bar{A}$ et $\bar{B}$ leur complémentaires dans E respectifs. Montrer que les 8 propositions suivantes sont équivalentes :

$$(i)\, A \subset B \quad (ii) A \cap B = A \quad (iii) \bar{A} \cup \bar{B} = \bar{A} \quad (iv) A \cap \bar{B} = \emptyset$$
$$(v) \bar{A} \cup B = E \quad (vi) \bar{B} \subset \bar{A} \quad (vii) \bar{A} \cap \bar{B} = \bar{B} \quad (viii) A \cup B = B$$

Exercice 2.12 *(Tous TD)* (indices : définitions) Pour tout entier relatif k, on pose $a_k = k^2$. Calculer les sommes suivantes :

a) $\sum_{k=2}^{4} a_k$; b) $\sum_{k=4}^{2} a_k$; c) $\sum_{k=1}^{3} a_{2k-5}$; d) $\sum_{k=1}^{3} k a_k$; e) $\sum_{\{k \in \mathbb{N} | 2 \leq k^3 \leq 100\}} a_k$; f) $\sum_{\{k \in \mathbb{N} | 1 \leq 3k \leq 10\}} a_{2k-5}$

Exercice 2.13 *(Tous TD, au moins a) et c)) (récurrences)* Démontrer par récurrence les égalités suivantes :

$$a)\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad b)\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad c)\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Exercice 2.14 *(∗)* (indices : définitions) Pour tout entier relatif k, on pose $A_k = [k, k+10]$. Que valent les unions et intersections suivantes ?

a) $\displaystyle\bigcup_{k=3}^{9} A_k$; b) $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$; c) $\displaystyle\bigcap_{k=3}^{9} A_k$; d) $\displaystyle\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$

Exercice 2.15 *(Tous TD)* (indices, union, intersection) Que valent les unions et intersections suivantes ?

a) $\displaystyle\bigcup_{x\in\mathbb{R}}[\sin x, 1+\sin x]$; b) $\displaystyle\bigcup_{x\in[1,+\infty[}\left]\frac{1}{x}, x\right[$; c) $\displaystyle\bigcap_{x\in[1,+\infty[}\left]\frac{1}{x}, x\right[$; d) $\displaystyle\bigcap_{x\in[1,+\infty[}\left[\frac{1}{x}, x\right]$

Exercice 2.16 *(Tous TD)* (indices, propriétés de l'union et de l'intersection) Soient A un ensemble, I un ensemble d'indices et $(B_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles indexée par I (c'est à dire, la donnée pour tout i dans I d'un ensemble B_i). Montrer que :

$$A \cup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I}(A\cup B_i) \quad \text{et} \quad A \cap \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I}(A\cap B_i)$$

Exercice 2.17 *(Tous TD)* (différence entre l'ensemble vide, et l'ensemble contenant uniquement l'ensemble vide). Soit $E = \{0, 1, 2\}$. Quel est l'ensemble des solutions des problèmes suivants ?
Problème 1 : quels sont les sous-ensembles de E qui ont au moins 4 éléments distincts ?
Problème 2 : quels sont les sous-ensembles de E inclus dans $C_E(E)$?

Exercice 2.18 (ensembles) Soient A un ensemble et X, Y, Z des parties de A.
a) Donner un exemple où : $X \cup Y = X \cup Z$ et $Y \neq Z$.
b) Donner un exemple où : $X \cap Y = X \cap Z$ et $Y \neq Z$.
c) Démontrer que

$$(X \cup Y = X \cup Z \quad \text{et} \quad X \cap Y = X \cap Z) \quad \Longrightarrow Y = Z\ .$$

Exercice 2.19 (ensembles, quantificateurs) On considère les ensembles

$$E = \left\{x \in [0,1], \exists n \in \mathbb{N}, x < \frac{1}{n+1}\right\} \text{ et } F = \left\{x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}, x < \frac{1}{n+1}\right\}$$

L'ensemble E a-t-il un, une infinité, ou aucun élément ? Même question pour l'ensemble F.

Exercice 2.20 Pour tout entier naturel p, on note $p\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers relatifs de la forme pn avec n dans $\mathbb{N}$.
a) Montrer que pour tous entiers naturels p et q,

$$p\mathbb{N} \subset q\mathbb{N} \Leftrightarrow p \in q\mathbb{N}$$

b) Montrer que pour tous entiers naturels p et q,

$$p\mathbb{N} = q\mathbb{N} \Leftrightarrow p = q$$

Exercice 2.21 Soit E un ensemble et A, B, C des parties de E. Soit $\bar{A}$ le complémentaire de A dans E. Montrer les propriétés suivantes :

$$a) \quad (A\backslash B)\backslash C = A\backslash(B\cup C) \qquad\qquad b) \quad A\cap(\bar{A}\cup B) = A\cap B$$

Exercice 2.22 (Différence symétrique de deux parties.) Soit E un ensemble. Pour A et B des parties de E, on note $A\Delta B$ l'ensemble $(A\cup B)\backslash(A\cap B)$. Soient A, B et C des parties de E. Montrer que :

$$A\Delta B = (A\backslash B)\cup(B\backslash A)$$
$$A\Delta\emptyset = A,\ A\Delta B = B\Delta A,\ A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$$
$$A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$$

Exercice 2.23 *(note aux chargés de TD : les notations* min *et* max *ne sont pas forcéments connus à ce stade)* Soit $(a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ une famille de réels. On définit

$$A = \min_{1\leq i\leq n}\big(\max_{1\leq j\leq p} a_{ij}\big), \quad B = \max_{1\leq j\leq p}\big(\min_{1\leq i\leq n} a_{ij}\big)$$

Montrer que $B \leq A$.

Exercice 2.24 (difficile) Soit $(A_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de parties d'un ensemble E. Les ensembles $\bigcap_{i\in I}\Big(\bigcup_{j\in J} A_{ij}\Big)$ et $\bigcup_{j\in J}\Big(\bigcap_{i\in I} A_{ij}\Big)$ sont-ils égaux ? L'un est-il inclus dans l'autre.

Exercice 2.25 Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 4 \Rightarrow n! \geq 2^n.$$

Exercice 2.26 *(∗)* (réindexation d'une somme) : Soient x un réel et n un entier naturel. Calculer les sommes $\sum_{k=2}^{n+2} x^{k-2}$ et $\sum_{k=4}^{n+3} x^{k-2}$.

3 Applications

Exercice 3.1 *(∗)* Soient $A = \{0,1,2\}$ et $B = \{0,1\}$. Donner des exemples d'applications de A dans B. Combien y-a-t-il de telles applications ? Mêmes questions pour les applications de B dans A.

Exercice 3.2 *(∗)* Soit l'application $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ donnée par : pour tout réel x, $f(x) = x^2$. Déterminer :
a) $f([-1,1])$, $f([0,3[)$, $f(\mathbb{R})$ et $f(\mathbb{R}_-)$; b) $f([-2,0]\cap[0,2])$ et $f([-2,0])\cap f([0,2])$ (comparez !) ;
c) $f^{-1}([0,3[)$, $f^{-1}([-10,3[)$ et $f^{-1}(\mathbb{R}_-)$.

Exercice 3.3 *(Tous TD)* Soit l'application $g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ donnée par : pour tout réel x, $g(x) = \sin x$. Sans justifier, donner :
a) $g([0,2\pi])$, $g(\mathbb{R})$, $g([0,10[)$ et $g([0,\frac{\pi}{2}[)$; b) $g^{-1}([2,+\infty[)$, $g^{-1}(\mathbb{R})$, $g^{-1}([-1,1])$ et $g^{-1}([-1,1[)$.

Exercice 3.4 *(∗)* Les applications suivantes sont-elles bien définies ? Si oui, sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?
1) $f : \{0,1,2\}\to\{1,8,-1,24\}$ telle que $f(0) = -1$, $f(1) = 24$, $f(2) = 1$.
2) $f : \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$
$n\mapsto -n$
3) $f : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$
$n\mapsto n+1$
4) $f : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$
$n\mapsto n-1$
5) $f : \mathbb{N}\to\{-1,+1\}$ qui à tout n de $\mathbb{N}$ associe 1 si n est pair, et -1 si n est impair.

Exercice 3.5 *(∗)* Pour chacune des applications 1), 2), 3) et 5) de l'exercice précédent, calculer : $f(\{2\})$, $f(\{0,2\})$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{-1,1\})$.

Exercice 3.6 *(Tous TD)* a) Quelle est l'allure du graphe des applications suivantes ? Ces applications sont-elles injectives, surjectives, bijectives ? (note aux chargés de TD : c'est l'occasion d'expliquer comment on lit sur le graphe de f les solutions dans de l'équation $f(x) = y$, et si f est injective, surjective ou ni l'un ni l'autre. Attention : répondre lors d'un examen : "l'application f est injective car son graphe a telle propriété", sans prouver rigoureusement que le graphe a cette propriété ne vaudra pas tous les points.)

b) Pour celles qui sont bijectives, quelle est leur application réciproque ?

c) Pour chacune de ces applications, déterminer l'image et l'image réciproque de l'intervalle $[2, 3]$.

1) $f_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$ 2) $f_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{array}$ 3) $f_3 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2+1 \end{array}$ 4) $f_4 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3+1 \end{array}$ 5) $f_5 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* \\ x \mapsto 1/x^2 \end{array}$

Exercice 3.7 Les applications suivantes sont elles-bien définies ? Si oui, sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1) $g_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{N} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$ 2) $g_2 : \begin{array}{l} \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$ 3) $g_3 : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$ 4) $g_4 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{N} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$

Exercice 3.8 Soit f une application de A vers B. Démontrer que $A = \bigcup_{y \in B} f^{-1}(\{y\})$.

Exercice 3.9 *(Cours)* (note aux chargés de TD : pas fait en amphi, mais fait dans le polycopié : n'y revenir que si cela semble utile) Soit f une application de E vers F. Soient A et A' des parties de E. Soient B et B' des parties de F. Montrer que :

1) $A \subset f^{-1}(f(A))$	2) $f(f^{-1}(B)) \subset B$
3) $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$	4) $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$
5)$f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$	6) $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$

Donner des exemples montrant que les inclusions du 1), du 2) et du 4) peuvent être strictes

Exercice 3.10 *(∗)* Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications (pas forcément bijectives). Soient $A \subset E$ et $C \subset G$. Montrer que $g \circ f(A) = g(f(A))$ et que $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$.

Exercice 3.11 *(Tous TD)* Soit $f : E \to E$ telle que $f \circ f = f$. Soit $x \in E$. Montrer que $f(x) = x$ si et seulement si $x \in f(E)$.

Exercice 3.12 *(∗)* Sans justifier, dire quelles applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ correspondent aux transformations du plan suivantes (le plan est supposé muni du repère orthonormé usuel) :

a) la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice du plan ;

b) la symétrie orthogonale par rapport à la seconde bissectrice du plan ;

c) la rotation de centre l'origine et d'angle $\pi/2$;

d) La projection sur l'axe des ordonnées ;

e) La translation de vecteur $2\vec{i} + \vec{j}$, où $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont respectivement les vecteurs directeurs usuels de l'axe des abscisses et de l'axe des ordonnées.

Exercice 3.13 *(Tous TD)* Soient I et J des parties de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ une application bijective. Montrer que le graphe de f^{-1} est l'image du graphe de f par la symétrie orthogonale d'axe la première bissectrice du plan.

Exercice 3.14 (Fonction caractéristique)

Soit E un ensemble. A toute partie A de E on associe l'application f_A de E dans $\{0, 1\}$ définie par $f_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $f_A(x) = 0$ sinon. L'application f_A est appelée fonction caractéristique de A. Soient A et B deux parties de E. Exprimer en fonction de f_A et de f_B les fonctions caractéristiques de $C_E(A)$, $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \backslash B$.

Exercice 3.15 L'application

$$g: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto xe^{-x} \end{array}$$

est-elle injective, surjective ? (On pourra avec profit construire le tableau de variation de g et utiliser des résultats d'analyse). Calculer $g^{-1}(\{-e\})$, $g^{-1}(\{1\})$, $g(\mathbb{R}_+)$ et $g^{-1}(\mathbb{R}_+)$.

Exercice 3.16 *(Tous TD)* (retour sur la logique) Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout réel x, $f(x)$ et $g(x)$ sont positifs. Soit $A = \{x \in \mathbb{R}, f^2(x) < g^2(x)\}$. On considère les deux propositions suivantes :

P1 : "Pour tout x dans A, $f(x) < g(x)$"

P2 : "Il existe x dans A tel que $f(x) < g(x)$"

a) La proposition P1 est-elle forcément vraie (c'est à dire vraie pour toutes fonctions f et g satisfaisant les hypothèses de l'énoncé) ?

b) La proposition P2 est-elle forcément vraie ? Si oui, le prouver ; sinon, donner un contre-exemple (c'est à dire un exemple d'applications f et g pour lesquelles la proposition est fausse).

c) Soit E un ensemble et pour tout x dans E, soit $P(x)$ une proposition. On suppose que la proposition "Pour tout x dans E, $P(x)$" est vraie. Donner une condition nécessaire et suffisante sur E pour que la proposition "Il existe x dans E tel que $P(x)$" soit vraie.

Exercice 3.17 Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des applications. On considère l'application

$$h: \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (f(x), g(x)) \end{array}$$

a) Montrer que si f ou g est injective, alors h est injective.

b) On suppose f et g surjectives. A-t-on forcément h surjective ?

c) Montrer que si h est surjective, alors f et g sont surjectives.

d) Donner un exemple où h est injective mais ni f ni g ne sont injectives.

Exercice 3.18 *(∗)* Soient

$$f: \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_- & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad h: \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_- & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{|x|} \end{array}$$

a) l'application $h \circ f$ est-elle bien définie ?

b) Prouver que f et h sont bijectives, et déterminer leur réciproques.

Exercice 3.19 (∗) Soient E, F, G des ensembles. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications.

a) Montrer que si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective.

b) Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.

Exercice 3.20 *(∗)* L'application suivante est-elle injective ? surjective ? bijective ?

$$f: \begin{array}{lcl} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (n, p) & \mapsto & n + p \end{array}$$

Déterminer $f^{-1}(\{3\})$, $f(\mathbb{N} \times \{2\})$ et $f(2\mathbb{N} \times 3\mathbb{N})$ où $k\mathbb{N} = \{kn, n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 3.21 Soient E, F, G, H des ensembles et f, g, h des applications telles que : $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$. Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g et h sont bijectives.

Exercice 3.22 *(∗)* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application strictement monotone. Montrer que f est injective. Donner un exemple d'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ injective mais non monotone.

Exercice 3.23 L'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, xy) \end{array}$$

est-elle injective, surjective ? bijective ?

Exercice 3.24 Sans justifier, pour chacune des applications suivantes, dire si elle est injective, surjective, bijective, ni injective ni surjective.

1) $f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}$ 2) $f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}$ 3) $f_3 : \begin{array}{rcl} [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}$ 4) $f_4 : \begin{array}{rcl} [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}$

Exercice 3.25 Mêmes questions que dans l'exercice précédent pour les applications suivantes.

a) $g_1 : \begin{array}{rcl} [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \cos x \end{array}$ *b)* $g_2 : \begin{array}{rcl} [0,\frac{\pi}{2}] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \cos x \end{array}$ *c)* $g_3 : \begin{array}{rcl}]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan x \end{array}$ *d)* $g_4 : \begin{array}{rcl}]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan x \end{array}$

Exercice 3.26 Soit f une application de E vers F. Démontrer les équivalences suivantes :

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow \forall A \subset E, A = f^{-1}(f(A))$$

$$f \text{ est surjective} \Leftrightarrow \forall B \subset F, B = f(f^{-1}(B))$$

Exercice 3.27 Soit f une application de E vers F et A une partie de E.
a) Démontrer qu'il n'y a en général pas d'inclusion entre $f(C_E(A))$ et $C_F(f(A))$.
b) Toutefois, démontrer : f bijective $\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E),\ f(C_E(A)) = C_F(f(A))$.

Exercice 3.28 a) Existe-t-il une application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement décroissante ?
b) Donner un exemple d'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective mais non strictement croissante.
c) Donner un exemple d'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ involutive ($f \circ f = Id_{\mathbb{N}}$) mais différente de l'identité.
d) (relativement difficile) Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application injective. Montrer que $f(n) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 3.29 (relativement difficile) Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f = f$. Montrer que f est injective ou f est surjective si et seulement si $f = Id_E$.

Exercice 3.30 (relativement difficile) Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

4 Ensembles finis et infinis

Exercice 4.1 *(∗) (note aux chargés de TD : ne faire que quelques questions : un corrigé sera distribué)* Répondre aux questions de la feuille "Injections et surjections dans la vie quotidienne".

Exercice 4.2 Pourquoi est-il équivalent de dire qu'il existe une bijection de E dans F, et de dire qu'il existe une bijection de F dans E ?

Exercice 4.3 *(note : sans doute fait en probabilités discrètes, n'y revenir que si cela semble utile)* Montrer en revenant à la définition qu'une réunion d'ensembles finis est finie (on pourra commencer par la réunion de deux ensembles disjoints, puis de deux ensembles quelconques).

Exercice 4.4 Montrer qu'un ensemble en bijection avec un ensemble dénombrable est dénombrable. Montrer qu'un ensemble en bijection avec un ensemble non dénombrable est non dénombrable.

Exercice 4.5 *(Cours : le résultat est à connaître, pas la preuve)* Soit E un ensemble fini ou infini. Montrer qu'il existe une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$. Montrer qu'il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$ (indication : soit $f : E \to \mathcal{P}(E)$ une application. Considérer l'ensemble $A = \{x \in E, x \notin f(x)\}$.). En déduire que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Exercice 4.6 *(∗)* (ensembles infinis) : on note $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs. Montrer que l'application suivante est bijective.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & 2\mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array}$$

Exercice 4.7 *(Tous TD)* (ensembles infinis) : soit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ l'application donnée par $f(n) = -n/2$ si n est pair, et $g(n) = (n+1)/2$ si n est impair. Montrer que l'application g est bijective.

Exercice 4.8 *(Tous TD)* Exercice (ensembles infinis) : en admettant le résultat des deux exercices précédents, déterminer une bijection entre $2\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.

Exercice 4.9 *(note aux chargés de TD : preuve faite dans la section "compléments" du polycopié de cours, expliquer juste l'idée graphiquement)* Soient E et F des ensembles (finis ou infinis). Montrer qu'il existe une injection de E vers F si et seulement si il existe une surjection de F vers E.

Exercice 4.10 ($\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ est dénombrable) (Preuve dans le polycopié de cours, section "Compléments")
a) En raisonnant sur un dessin, expliquer pourquoi, intuitivement, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.

b) La bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ qui se "voit" sur un dessin est un peu longue à formaliser. C'est pourquoi nous allons en considérer une autre. Soit $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ l'application donnée par, pour tous $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $f(n, p) = 2^n(2p + 1)$. Montrer que f est bijective. En déduire que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable (cette preuve m'a été suggérée par Saber Trabelsi, que je remercie).

Exercice 4.11 (une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable : la preuve - hors programme - est dans le polycopié de cours) On admet que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable. Soit I un ensemble dénombrable. Pour tout i dans I, soit A_i un ensemble dénombrable. On suppose que les ensembles A_i sont deux à deux disjoints. Montrer que $\bigcup_{i \in I} A_i$ est dénombrable.

Exercice 4.12 On admet que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable. Montrer que le produit de deux ensembles dénombrables est dénombrable. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}^p$ est dénombrable.

Exercice 4.13 *(difficile)* Une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction polynôme (resp. une fonction polynôme à coefficients rationnels) s'il existe un entier n et des réels (resp. des rationnels) a_0,...,a_n tels que pour tout réel x, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$. Une racine d'une telle fonction polynôme est un réel x tel que $f(x) = 0$. On admet qu'une fonction polynôme a un nombre fini de racines. Montrer que l'ensemble des racines de fonctions polynômes à coefficients rationnels est dénombrable. On pourra utiliser qu'un produit d'ensembles dénombrables est dénombrable, qu'une réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable, et que deux fonctions polynômes sont égales si et seulement si elles ont les mêmes coefficients.

5 Complexes

Si besoin est, on pourra admettre le résultat suivant, qui sera démontré dans la suite du cours : si une application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une fonction polynôme, alors il existe un complexe z tel que $f(z) = 0$.

Exercice 5.1 Montrer que si a et b sont deux nombres complexes de module 1 tels que $ab \neq -1$, alors $\dfrac{a+b}{1+ab}$ est réel.

Exercice 5.2 ($*$) Que dit la formule de Moivre ? Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$, $\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$, $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(k\theta)$ (indication : $\cos(k\theta) = Re\left(e^{ik\theta}\right)$). Calculer $\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\theta}$.

Exercice 5.3 (Tous TD) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \cos(x + (2k\pi/n))$ et $\sum_{k=1}^{n} \sin(x + (2k\pi/n))$.

Exercice 5.4 Soit f l'application de $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$z \mapsto f(z) = \dfrac{ln|z|}{z^2}$.

$i)$ On pose $z = re^{it}$, avec $r \in \mathbb{R}_+\backslash\{0\}$ et $t \in \mathbb{R}$. Calculer le module et l'argument de $z' = f(z)$. L'application f est-elle injective ?

$ii)$ Soit R un réel strictement positif. On pose $E = \{z \in \mathbb{C}^*, |z| = R\}$. Déterminer l'image directe $f(E)$ de E par f. Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

Exercice 5.5 Démontrer l'égalité du parallélogramme :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}, |a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$$

Exercice 5.6 (Tous TD) Soient r_1 la rotation de centre A$(1-i)$, d'angle $\pi/2$ et r_2 la rotation de centre B$(1+i)$, d'angle $\pi/2$.

a) Définir les transformations complexes correspondant à r_1 et r_2.
b) Calculer $r_1 \circ r_2$ et $r_2 \circ r_1$ et les caractériser géométriquement.
c) Calculer $r_1 \circ r_2 \circ r_1^{-1}$ et la caractériser géométriquement.

Exercice 5.7 Trouver l'ensemble des nombres complexes z tels que les points d'affixes z, z^2, z^3 soient alignés.

Exercice 5.8 Soit f l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad f(z) = \frac{2}{\bar{z}}.$$

a) Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $f \circ f(z) = z$.
b) f est-elle bijective ? Si oui, calculer f^{-1}.
c) Soit R un réel strictement positif, et C le cercle $\{z \in \mathbb{C}, |z| = R\}$. Calculer $f(C)$.
d) Quel est l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}^*, f(z) = z\}$?

Exercice 5.9 Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout nombre complexe $z = x + iy$, avec x et y réels, associe :

$$f(z) = \frac{1}{2}(e^{-y}e^{ix} + e^{y}e^{-ix}).$$

a) Montrer que pour tout z réel, $f(z) = \cos(z)$.
b) Soit z dans $\mathbb{C}$. Montrer que $f(z + 2\pi) = f(z)$, que $f(-z) = f(z)$, et que $f(2z) = 2(f(z))^2 - 1$.
c) f est-elle injective ?
d) Calculer $f^{-1}(\{0\})$.

Exercice 5.10 (Tous TD) Soit f l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*,\ f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

a) L'application f est-elle injective ? surjective ?
b) Calculer l'image réciproque de $\{i\}$ par f.
c) Déterminer l'image directe du cercle unité U par f.
d) On note H le complémentaire dans $\mathbb{C}$ du segment $[-1, 1]$, et on note D l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}^*, |z| < 1\}$. Montrer que l'on peut définir l'application :

$$\begin{array}{rcl} g : D & \longrightarrow & H \\ z & \mapsto & f(z) \end{array}$$

e) Montrer que g est bijective. (On pourra remarquer que le produit des racines de l'équation $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ est 1).

Exercice 5.11 (∗) Calculer les racines carrées de $-2 + 2\sqrt{3}i$, puis celles de $9i$.

Exercice 5.12 (Tous TD) Résoudre l'équation $z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - (1 + i\sqrt{3}) = 0$.
a) Exprimer les racines z_1 et z_2 en fonction des nombres complexes $a = (\sqrt{3} + i)/2$ et $b = (-1 + i\sqrt{3})/2$.
b) Déterminer le module et l'argument de ces racines.
En déduire les valeurs de $\cos(5\pi/12)$, $\sin(5\pi/12)$, $\cos(11\pi/12)$ et $\sin(11\pi/12)$.

Exercice 5.13 (∗) Soit δ une racine carrée du nombre complexe z. Trouver les racines carrées de $-z$, $(1 + i)z$ et z^3 en fonction de δ.

Exercice 5.14 (Tous TD) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^6 + z^3 + 1 = 0$.

Exercice 5.15 Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(x + i)^n = (x - i)^n$$

Exercice 5.16 (∗) Ecrire, sous forme d'une application de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$, les transformations géométriques suivantes :
a) rotation de centre A$(1 + i)$, d'angle $-\pi/4$
b) homothétie de centre B$(-2i)$, de rapport $1/3$
c) symétrie orthogonale par rapport à la droite $y = a$, $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 5.17 (Tous TD) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Développer $(\cos\theta + i \sin\theta)^n$; en déduire que $\cos(n\theta)$ est un polynôme en $\cos\theta$ et calculer ce polynôme pour $n = 1, 2, 3$.

Exercice 5.18 (Tous TD) Exprimer $(\cos 5x)(\sin 3x)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$

Exercice 5.19 (Tous TD) Soit U^* le cercle unité de $\mathbb{C}$ privé du point -1 :

$$U^* = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1, z \neq -1\}$$

On considère l'application :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & f(x) = \frac{1-ix}{1+ix} \end{array}$$

i) Calculer, pour tout réel x, le module de $f(x)$. L'application f est-elle surjective ? injective ? Peut-on avoir $f(x) = -1$?
ii) Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans U^* telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x)$. Montrer que g est bijective.
iii) On considère la relation $\mathcal{R}$ définie sur U^* par :

$$z\mathcal{R}t \text{ si et seulement si } g^{-1}(z) \leq g^{-1}(t)$$

$\mathcal{R}$ est-elle réflexive ? transitive ? une relation d'ordre ?

Exercices complémentaires sur les complexes

Ces enoncés - qui proviennent du site Exo7 - ont pour but de permettre aux chargés de TD de revenir sur certains points si cela semble utile, et aux étudiants de s'entraîner sur des exercices dont le sujet et le niveau sont adaptés au cours.

Exercice 5.20 Mettre sous la forme $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ les nombres :

$$\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

Exercice 5.21 Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants, ainsi que de leurs conjugués :

1. $1 + i(1 + \sqrt{2})$.
2. $\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + i(1 - \sqrt{5})$.
3. $\frac{\tan\varphi - i}{\tan\varphi + i}$ où φ est un angle donné.

Exercice 5.22 Représenter sous forme trigonométrique les nombres :

$$1+i \quad ; \quad 1+i\sqrt{3} \quad ; \quad \sqrt{3}+i \quad ; \quad \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}.$$

Exercice 5.23 Déterminer le module et l'argument des nombres complexes :

$$e^{e^{i\alpha}} \quad \text{et} \quad e^{i\theta} + e^{2i\theta}.$$

Exercice 5.24 Déterminer le module et l'argument de $\frac{1+i}{1-i}$. Calculer $(\frac{1+i}{1-i})^{32}$.

Exercice 5.25 Calculer les puissances n-ièmes des nombres complexes :

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} \quad ; \quad z_2 = 1 + j \quad ; \quad z_3 = \frac{1 + i\tan\theta}{1 - i\tan\theta}.$$

Exercice 5.26 Mettre sous forme trigonométrique $1 + e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi, \pi[$. Donner une interprétation géométrique.

Exercice 5.27 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2 + z + 1 = 0 \quad ; \quad z^2 - (1+2i)z + i - 1 = 0 \quad ; \quad z^2 - \sqrt{3}z - i = 0 \quad ;$$

$$z^2 - (5-14i)z - 2(5i+12) = 0 \;;\; z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i = 0 \;;\; 4z^2 - 2z + 1 = 0 \;;$$

$$z^4 + 10z^2 + 169 = 0 \quad ; \quad z^4 + 2z^2 + 4 = 0.$$

Exercice 5.28

1. Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ a-t-on $|1 + iz| = |1 - iz|$.
2. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = \frac{1+ia}{1-ia}$$
où $a \in \mathbb{R}$. Montrer, sans les calculer, que les solutions de cette équation sont réelles. Trouver alors les solutions.
3. Calculer les racines cubiques de $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$.

Exercice 5.29 Déterminer les nombres complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que les points d'affixes z, $\frac{1}{z}$ et $(1-z)$ soient sur un même cercle de centre O.

Exercice 5.30 1. Calculer $\cos 5\theta$, $\cos 8\theta$, $\sin 6\theta$, $\sin 9\theta$, en fonction des puissances de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

2. Calculer $\sin^3\theta$, $\sin^4\theta$, $\cos^5\theta$, $\cos^6\theta$, à l'aide des cosinus et sinus des multiples entiers de θ.

Exercice 5.31 Montrer que tout nombre complexe z non réel de module 1 peut se mettre sous la forme $\frac{1+ir}{1-ir}$, où $r \in \mathbb{R}$.

Exercice 5.32 Que dire de trois complexes a, b, c non nuls tels que $|a+b+c| = |a| + |b| + |c|$.

Exercice 5.33 On définit une fonction f de $\mathbb{C}\backslash\{i\}$ dans $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ en posant

$$f(z) = \frac{z+i}{z-i}.$$

1. On suppose z réel. Quel est le module de $f(z)$?
2. Trouver les nombres complexes z tels que $f(z) = z$.

Exercice 5.34 Montrer que les solutions de l'équation $1 + z + z^2 + ... + z^{n-1} - nz$ sont de module inférieur ou égal à 1.

6 Relations

Exercice 6.1 $(*)$ *(relations)* On considère la relation $\mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : pour tous réels x et y, $x\mathcal{R}y$ ssi $x+y \leq 10$. Cette relation est-elle reflexive ? transitive ? symétrique ? antisymétrique ? totale ? Est-ce une relation d'équivalence ? Est-ce une relation d'ordre

Exercice 6.2 *(cours)* (équivalence) Soient E et F des ensembles. Soit $f : E \to F$ une application. Soit $\mathcal{R}$ la relation sur E définie par : pour tous x et y dans E, $x\mathcal{R}y$ ssi $f(x) = f(y)$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 6.3 *(Tous TD)* (équivalence) Montrer que les relations suivantes sont des relations d'équivalence (on pourra utiliser l'exercice précédent). Préciser les classes d'équivalence.
a) sur $\mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \iff \cos x = \cos y$;
b) sur $\mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \iff (\cos x = \cos y \text{ et } \sin x = \sin y)$;
c) sur $\mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \iff E(x) = E(y)$, où $E(x)$ dénote la partie entière de x ;
d) sur $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$, $(p,q)\mathcal{R}(p',q') \iff pq' = p'q$;

Exercice 6.4 (équivalence) On considère une partition $\mathcal{P}$ d'un ensemble E, c'est-à-dire une famille $(A_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles non vides de E telle que :

$$E = \cup_{i\in I} A_i \qquad \text{et} \qquad \forall i \in I, \forall j \in I, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

On définit alors la relation $\mathcal{R}$ sur E par : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists i \in I, (x \in A_i \text{ et } y \in A_i)$
Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. Quelles en sont les classes d'équivalence ?

Exercice 6.5 *(Tous TD)* (équivalence) *Notation : si n et p sont des entiers relatifs, on dit que n divise p, et on note $n|p$, s'il existe un entier relatif k tels que $p = kn$. Par exemple,* 6 *divise* 12 *et* 30*, mais ne divise pas* 10.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{R}$ la relation sur $\mathbb{N}$ définie par : pour tous entiers naturels p et q,

$$p\mathcal{R}q \Leftrightarrow n|(p-q)$$

(on dit alors que p est congru à q modulo n). Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et que $p\mathcal{R}q$ si et seulement si le reste de la division euclidienne de p par n est le même que le reste de la division euclidienne de q par n. Quelles sont les classes d'équivalences de la relation $\mathcal{R}$?

Exercice 6.6 *(∗)* Sur l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, on considère la relation $\mathcal{R}$ définie par, pour toutes parties A et B de $\mathbb{N}$, $A\mathcal{R}B$ si et seulement s'il existe une bijection de A dans B. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 6.7 (relations) Soit E un ensemble non vide. Déterminer toutes les relations sur E qui sont à la fois des relations d'équivalence et des relations d'ordre.

Exercice 6.8 (relations) Sur l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par, pour toutes parties finies A et B de $\mathbb{N}$, $A\mathcal{R}B$ si et seulement si $CardA \leq CardB$. La relation $\mathbb{R}$ est-elle une relation de préordre ? d'ordre ? d'équivalence ?

Exercice 6.9 (ordre) Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ (muni de la relation d'ordre usuelle) admettant chacune une borne supérieure.

i) Montrer que $A \cup B$ a une borne supérieure et que :

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$$

ii) On définit

$$A + B = \{x \in \mathbb{R}, \exists (a,b) \in A \times B, x = a + b\}$$

Montrer que $A + B$ a une borne supérieure et que

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

Exercice 6.10 *(Tous TD)* (ordre) On munit $\mathbb{R}^2$ des deux relations binaires :

$$(x,y)\mathcal{R}_1(x',y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y' \text{ (ordre produit)}$$

$$(x,y)\mathcal{R}_2(x',y') \Leftrightarrow x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y') \text{ (ordre lexicographique)}$$

On admet que ce sont des relations d'ordre.
i) Soit (a,b) donné dans $\mathbb{R}^2$. Identifier et représenter les ensembles :

$$X_{ab} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y)\mathcal{R}_1(a,b)\} \qquad \text{et} \qquad Y_{ab} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y)\mathcal{R}_2(a,b)\}$$

ii) Soit $A = \{(-10,3), (0,0), (1,-1), (3,1), (1,1), (7,12), (-20,20)\}$.

a) Pour l'ordre produit : ordonner (classer) les éléments de A (on pourra représenter cet ordre en faisant une flèche d'un élément x à un élément y de A pour dire que x est plus petit que y, et en omettant les flèches impliquées par d'autres flèches et la transitivité de la relation d'ordre).

Quels sont les éléments maximaux de A ? les éléments minimaux ? A a-t-il un plus grand élément ? une borne supérieure ? un plus petit élément ? une borne inférieure ?

b) Même questions pour l'ordre lexicographique.

iii) Montrer que dans $\mathbb{R}^2$ muni de l'ordre produit, toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure. Est-ce vrai pour l'ordre lexicographique ? (on pourra considérer la partie $B = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}$).

Exercice 6.11 *(∗)* (ordre) On admet que l'inclusion est une relation d'ordre sur l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$. Soit

$$A = \{[0,1], [3,10], \mathbb{R}_+, \mathbb{Z}, \{4,7\}, \mathbb{N}\}\,.$$

Ordonner les éléments de A suivant la relation d'inclusion. Déterminer l'ensemble des minorants (resp. majorants) de A. Quels sont les éléments maximaux de A ? les éléments minimaux ? L'ensemble A a-t-il une borne inférieure ? un plus petit élément ? une borne supérieure ? un plus grand élément ?

Exercice 6.12 *(préordre)* Soit E un ensemble qui a au moins deux éléments. Sur l'ensemble des parties de E on définit la relation $\mathcal{R}$ par : pour tous A et B dans $\mathcal{P}(E)$, $A\mathcal{R}B$ si et seulement s'il existe une injection de A vers B. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation de préordre.

Exercice 6.13 (Tous TD) (préférences en micro-économie) On s'intéresse aux préférences d'un consommateur sur des paniers de biens contenant x unités du bien 1 et y unités du bien 2, où x et y sont des réels. Un tel panier est noté (x,y) et assimilé à un point de $\mathbb{R}^2$. On notera $\preccurlyeq_i$, $i = 1,2,3$ les relations de préférences sur $\mathbb{R}^2$ définies ci-dessous, et correspondant à des préférences possibles du consommateur.

1) $(x,y) \preccurlyeq_1 (x',y') \Leftrightarrow xy \leq x'y'$;
2) $(x,y) \preccurlyeq_2 (x',y') \Leftrightarrow x + y \leq x' + y'$ (biens parfaitements substituables ;
3) $(x,y) \preccurlyeq_2 (x',y') \Leftrightarrow \min(x,y) \leq \min(x',y)'$ (biens parfaitement complémentaires)

Vérifier que chacune de ces relations est une relation de préordre mais pas une relation d'ordre. Pour chacune de ses relations, donner l'allure de l'ensemble des paniers de biens (x,y) :

a) préférés à $(1,2)$;
b) tels que l'agent préfère $(1,2)$ à (x,y) ;
c) tels que l'agent est indifférent entre $(1,2)$ et (x,y).

Exercice 6.14 Donner un exemple de partie d'un ensemble ordonné qui n'a aucun élément maximal.

Exercice 6.15 Soit $(E,\leq)$ un ensemble ordonné. Soit A une partie de E. Montrer que si A a un plus grand élément alors A a un et un seul élement maximal. Plus difficile : la réciproque est-elle vraie ?

Exercice 6.16 On munit $\mathbb{N}$ de la relation de divisibilité définie par : $\forall x,y \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$,

$$x|y \iff \exists k \in \mathbb{N}, y = kx$$

On admet que | est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.

Calculer s'ils existent le plus grand élément, le plus petit élément, l'ensemble des majorants et des minorants des sous-ensembles suivants :

$$A = \{4,8,12\}, \quad B = \{2,3\}, \quad C = \{2,3,4,5,6,7\}, \quad D = \{2,3,6,9,18\}$$

Exercice 6.17 On définit sur l'ensemble des mots finis l'ordre correspondant à l'ordre de la numération en chiffres arabes : un mot vient avant un autre s'il a strictement moins de lettres ou si (il a autant de lettres et vient avant dans l'ordre usuel du dictionnaire).

Expliquer rapidement pourquoi cela définit bien une relation d'ordre, et en quoi cet ordre correspond à la numértion en chiffres arabes. Ordonner suivant cet ordre les mots de la phrase suivante (on ne tient pas compte des accents) :

"Manon et Mickaël sont de très beaux bébés"

7 Divers

Exercice 7.1 *(Cours)* (moyenne arithmétique et moyenne géométrique) Soient a et b des réels positifs. Montrer que

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

(on dit que la moyenne géométrique est inférieure à la moyenne arithmétique).

Exercice 7.2 (généralise le résultat de l'exercice précédent)

a) Montrer que : $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$, puis que : $\forall x > 0, \ln x \leq x - 1$.

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ des réels positifs tels que $x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1} \leq n+1$. Montrer que :

$$x_1 + ... + x_n \leq n\alpha, \quad \text{où } \alpha = 1 + \frac{1}{n} - \frac{x_{n+1}}{n}.$$

c) Démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1 \in \mathbb{R}_+, ..., \forall x_n \in \mathbb{R}_+$,

$$x_1 + \cdots + x_n \leq n \Rightarrow x_1 x_2 \cdots x_n \leq 1$$

d) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n$ des réels positifs. Comparer leur moyenne géométrique $(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$ et leur moyenne arithmétique $\frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$.

8 Arithmétique

Note aux chargés de TD : certains étudiants n'ont pas suivi la spécialité mathématiques en terminale, et n'ont donc jamais entendu parler d'arithmétique au lycée.

Exercice 8.1 $(*)$ Donner la décomposition en nombres premiers de 8, 12, 17, 495 et 1001.

Exercice 8.2 $(*)$ Que valent $pgcd(a, b)$ et $ppcm(a, b)$ dans les cas suivants ?
i) $a = 6$, $b = 12$;
ii) $a = 3$, $b = 5$;
iii) $a = 12$, $b = 18$. Vérifier que dans ces exemples $pgcd(a, b) \times ppcm(a, b) = ab$ (on admet que c'est vrai en général)

Exercice 8.3 $(*)$ Déterminer $pgcd(a, b, c)$ et $ppcm(a, b, c)$ dans les cas suivants :
i) $a = b = c = 2$;
ii) $a = 2$, $b = 4$, $c = 6$;
iii) $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$.

A-t-on toujours $pgcd(a, b, c) \times ppcm(a, b, c) = abc$?

Exercice 8.4 $(*)$ Déterminer $pgcd(a, b, c)$ dans les cas suivants : i) $a = 120$, $b = 60$, $c = 24$; ii) $a = 60$, $b = 45$, $c = 18$.

Exercice 8.5 Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, les entiers n et $n+1$ sont premiers entre eux, i.e. $pgcd(n, n+1) = 1$. Y-a-t-il d'autres entiers $k \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, n et $n+k$ sont premiers entre eux ?

Exercice 8.6 (Tous TD) Soient a, b, c des entiers naturels non nuls. Démontrer que $pgcd(a, b, c) = pgcd(pgcd(a, b), c)$ et $ppcm(a, b, c) = ppcm(ppcm(a, b), c)$.

Exercice 8.7 *(Tous TD) (Algorithme d'Euclide pour la recherche du PGCD)*

Soient a et b des entiers naturels, avec b non nul. Voici une méthode pour trouver le pgcd de a et de b. On commence par poser $r_0 = b$, puis :

Etape 1 : on appelle r_1 le reste dans la division (euclidienne) de a par b. Si $r_1 = 0$, on s'arrête, sinon on passe à l'étape suivante.

Etape 2 : on appelle r_2 le reste dans la division de r_0 par r_1. Si $r_2 = 0$, on s'arrête, sinon on passe à l'étape suivante.

Etape 3 : on appelle r_3 le reste dans la division de r_1 par r_2. Si $r_3 = 0$, on s'arrête, sinon on passe à l'étape suivante.

Etape k (pour $k \geq 2$) : on appelle r_k le reste dans la division de r_{k-2} par r_{k-1}. Si $r_k = 0$, on s'arrête, sinon on passe à l'étape suivante.

L'algorithme s'arrête forcément. En effet, tant que $r_n \neq 0$, $r_{n+1} \leq r_n - 1$, donc $r_n \leq r_0 - n$. Donc au bout d'au plus b étapes, on obtient un reste nul et l'algorithme s'arrête. Nous allons montrer deux choses : d'une part, le pgcd de a et de b est le dernier reste non nul (donc r_{k-1} si l'algorithme s'arrête à l'étape k) ; d'autre part, il existe des entiers relatifs α et β tels que $pgcd(a, b) = \alpha a + \beta b$.

1) Soit r le reste dans la division euclidienne de a par b.

a) Montrer que si $r = 0$, alors $pgcd(a, b) = b$.

b) Soit $d \in \mathbb{N}$. Montrer que d divise a et b si et seulement si d divise b et r. En déduire que $pgcd(a, b) = pgcd(b, r)$.

c) Montrer qu'il existe des entiers relatifs α_1 et β_1 tels que $r = \alpha_1 a + \beta_1 b$.

2) Montrer que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, si l'algorithme ne s'arrête pas avant l'étape k (non incluse), alors $pgcd(r_k, r_{k-1}) = pgcd(a, b)$ et il existe des entiers relatifs α_k et β_k tels que $r_k = \alpha_k a + \beta_k b$.

3) Soit n l'étape où l'algorithme s'arrête (on a donc $r_n = 0$ et $r_{n-1} \neq 0$). Montrer que $pgcd(a, b) = r_{n-1}$ et qu'il existe des entiers relatifs α et β tels que $pgcd(a, b) = \alpha a + \beta b$.

4) Déterminer en utilisant l'algorithme d'Euclide le pgcd de 91 et 247, et des entiers relatifs α et β tels que $pgcd(91, 247) = 91\alpha + 247\beta$.

Exercice 8.8 *(Tous TD) (Théorème de Bézout)* Soient p et q dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que $pgcd(p, q) = 1$ si et seulement s'il existe des entiers relatifs α et β tels que $\alpha p + \beta q = 1$ (on pourra utiliser l'exercice précédent).

Exercice 8.9 Soient a, b, c des entiers naturels non nuls. Déduire du théorème de Bézout que si $pgcd(a, b) = 1$ et $pgcd(a, c) = 1$ alors $pgcd(a, bc) = 1$.

Exercice 8.10 Soient a et b dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que si a et b sont des nombres premiers distincts, alors $pgcd(a, b) = 1$.

Exercice 8.11 Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et p_1,..., p_q des nombres premiers (dans $\mathbb{N}$). Soient α_1,...., α_q et β_1,..., β_q des entiers naturels (pas forcément non nuls).

a) En utilisant les résultats des deux exercices précédents, montrer que si $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} .... p_q^{\alpha_q} = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} .... p_q^{\beta_q}$, alors $\alpha_i = \beta_i$ pour tout i dans $\{1, 2, ..., q\}$.

b) En déduire que la décomposition en produit de facteurs premiers d'un entier naturel supérieur ou égal à 2 est unique (ce qu'on avait admis en cours).

9 Polynômes

Note aux chargés de TD : en cours, la notion abstraite de polynôme n'a pas été introduite, on a parlé uniquement de fonctions polynômes. La notation X désigne l'identité de $\mathbb{K}$ et X^n la fonction de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ qui à tout élément x de $\mathbb{K}$ associe x^n.

Exercice 9.1 $(*)$ Soient a_0, a_1, a_2 et b_0, b_1 des réels. Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = 0$ si $n \geq 3$ et $b_n = 0$ si $n \geq 2$. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les fonctions polynômes définies par, pour tout réel x, $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ et $g(x) = b_0 + b_1 x$.

a) Vérifier que fg est une fonction polynôme et déterminer ses coefficients (comme vous l'avez toujours fait).

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $c_n = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k b_{n-k}$. Calculer c_n (pour tout n dans $\mathbb{N}$). Vérifier que c_n est le coefficient de degré n de fg.

Exercice 9.2 $(*)$ Effectuer les divisions euclidiennes de A par B pour les polynômes A et B suivants :
1) $A = X^3 + 6X^2 + 2X + 5$, $B = 2X^2 + 4$;   2) $A = X^7 + 2X^5 + 7X^3 + 15X + 2$, $B = X^3 + 2X$;
3) $A = X^4 + 1$, $B = X^2 + 1$;   4) $A = 2X^3 + 17X^2 - 7X + 2$, $B = 2X^5 - 1$.

Exercice 9.3 $(*)$ Soit n un entier. Quand on introduit un polynôme en écrivant : soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, suppose-t-on implicitement que $deg(P) = n$? que $deg(P) \leq n$? rien du tout ? Même question quand on écrit : soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ avec $a_n \neq 0$.

Exercice 9.4 Soient A et B des polynômes à coefficient réels qu'on peut donc voir comme des polynômes à coefficient complexes particuliers. On suppose $B \neq 0$. Soient Q et R des polynômes à coefficients complexes tels que $A = BQ + R$. Les polynômes Q et R sont-ils forcément à coefficients réels ? Qu'en est-il si, de plus, $deg(R) < deg(B)$?

Exercice 9.5 $(*)$ Soit $B \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul. On considère la relation $\mathcal{R}$ suivante sur $\mathbb{K}[X]$: pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{K}[X]$,

$$P \,\mathcal{R} Q \Leftrightarrow B|(P - Q)$$

Montrer que $P\mathcal{R}Q$ si et seulement si P et Q ont même reste dans la division euclidienne par B. En déduire que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 9.6 $(*)$ Soit A et B des polynômes non nuls. Montrer que si $B|A$ alors $degB \leq degA$. En déduire que B est constant si et seulement si pour tout A dans $\mathbb{K}[X]$, $B|A$.

Exercice 9.7 (Tous TD, sauf si cela a déjà été fait en analyse) Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. Montrer par récurrence la formule du binôme de Newton : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(f + g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k g^{n-k}$$

Exercice 9.8 (Tous TD) Soient a et b deux réels distincts et P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Calculer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$ en fonction de a, b, $P(a)$ et $P(b)$. Calculer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^2$ en fonction de a, $P(a)$ et $P'(a)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, quel est le reste de la division de $P_n = X^n + X + b$ par $(X - a)$?

Exercice 9.9 $(*)$ Calculer le reste de la division euclidienne de A par B où $n \geq 2$, $A = X^n + X + 1$ et $B = (X - 1)^2$? Pour p et q entiers tels que $p > q$, quel est le reste de la division de $X^p + X^q + 1$ par $X^2 + X$?

Exercice 9.10 (Tous TD) Soit $n \geq 3$. Déterminer un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de degré n tel que $P(1) = 3$, $P'(1) = 4$, $P''(1) = 5$ et $P^{(k)}(1) = 3$ si $k \in \{3, .., n\}$. Un tel polynôme est-il unique ?

Exercice 9.11 Déterminer les polynômes de degré 3 de $\mathbb{R}[X]$ divisibles par $Q = X + 1$ et dont les restes des divisions euclidiennes par $X + 2$, $X + 3$ et $X + 4$ sont égaux.

Exercice 9.12 Factoriser le polynôme réel

$$P_n = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X(X+1)}{2!} + \cdots + \frac{X(X+1)\cdots(X+n-1)}{n!} .$$

Faire un raisonnement par récurrence.

Exercice 9.13 (Tous TD) Montrer qu'un polynôme réel de degré 3 admettant une racine double dans $\mathbb{C}[X]$ a toutes ses racines dans $\mathbb{R}$.

Exercice 9.14 Soient p et q deux réels fixés et A le polynôme $A = X^3 + pX + q$. Montrer que A admet au moins une racine réelle. Déterminer en fonction de (p, q) le nombre de racines réelles de A.

Exercice 9.15 (Tous TD) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes suivant :
1) $X^n - 1$; 2) $2X^n - 2$; 3) $X^{n-1} + X^{n-2} + ... + X + 1$; 4) $X^n + 1$; 5) $X^{2n} - 1$

Exercice 9.16 (Tous TD) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes suivant :
1) $X^4 + 2X^3 - X - 2$; 2) $X^5 + X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1$; 3) $X^4 + X^2 + 1$; 4) $X^8 + X^4 + 1$;
5) $X^2 - 2X\cos(\theta) + 1$; 6) $X^4 - 2X^2\cos(2\theta) + 1$; 7) $17X^2 - 34X + 17$

Exercice 9.17 (Tous TD) Déterminer le degré du polynôme $P = (X + 1)^7 - X^7 - 1$. Montrer que P est divisible par $X - j$ où $j = e^{2i\pi/3}$. Déterminer deux racines réelles entières de P en précisant les ordres de multiplicité. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 9.18 ($*$) Soit $P = X^3 - 3X + 1$ et soient a, b, c les trois racines de P dans $\mathbb{C}[X]$. On ne cherchera pas à calculer ces racines. Montrer que a, b et c sont distinctes. Calculer $A = a + b + c$, $B = ab + ac + bc$ et $C = abc$.

Exercice 9.19 Quel est l'ordre de multiplicité de 1 en tant que racine du polynôme $P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$?

Exercice 9.20 Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme à coefficients complexes $P = X^4 + aX^3 + b$ admette une racine multiple.

Exercice 9.21 (Tous TD) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient P_0, P_1,...,P_n dans $\mathbb{K}[X]$ tels que pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, $deg(P_k) = k$. On dit qu'un polynôme P est une combinaison linéaire des polynômes P_0,...,P_n s'il existe des scalaires λ_0,...,λ_n tels que $P = \lambda_0 P_0 + ... + \lambda_n P_n$. Dans ce cas, on dit que cette écriture est unique si pour tous scalaires μ_0,...,μ_n tels que $P = \mu_0 P_0 + ... + \mu_n P_n$, on a $\mu_k = \lambda_k$ pour tout $k \in \{1, ..., n\}$. Le but de cet exercice est de montrer que tout polynôme de degré au plus n peut s'écrire, et de façon unique, comme combinaison linéaire des polynômes P_0, P_1,...,P_n.

Soit $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X], deg(P) \leq n\}$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$.

a) Si $n \geq 1$, montrer qu'il existe $\lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que $P - \lambda_n P_n \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

b) En déduire qu'il existe des scalaires λ_0,...,λ_n tels que $P = \lambda_0 P_0 + ... + \lambda_n P_n$.

c) Montrer que cette écriture est unique.

Exercices complémentaires sur les polynômes

Exercice 9.22 Soit $A = X^5 + X^4 + aX^3 + bX^2 + 5X - 2$ et $B = X^3 - 2X + 1$. Peut-on déterminer a et b pour que B divise A ?

Exercice 9.23 Soit

$$P = \frac{X^n(4-2X)^n}{n!}$$

où n est un entier strictement positif.

a) Montrer que les $n-1$ premières dérivées de P sont nulles pour $x = 0$ et $x = 2$.

b) Ecrire la formule de Taylor pour P au point 0 et au point 2.

c) En déduire que toutes les dérivées de P prennent des valeurs entières pour $x = 0$ et $x = 2$.

Exercice 9.24 Soient n un entier supérieur à 3, et P un polynôme de degré n à coefficients réels tel que $P(0) = 1$ et $P'(1) = 0$.

a) Montrer qu'il existe un unique polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P = XQ + 1$.

b) Montrer que $Q(1) + Q'(1) = 0$.

c) Montrer que $Q(X) = (X-2)Q'(1) + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{Q^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k$.

d) En déduire qu'il existe des réels uniques a_1,...,a_{n-1} tels que :

$$P = 1 + a_1 X(X-2) + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{a_k}{k!} X(X-1)^k.$$

Exercice 9.25 (difficile) Trouver les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(X)P(X+2) + P(X^2) = 0$. (On montrera que si α est racine de P, alors α^2 aussi, puis que la seule racine possible est 1.)

Exercice 9.26 En développant de deux façons différentes le polynôme

$$P = (X+1)^{(p+q)} = (X+1)^p(X+1)^q \ ,$$

montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \geq n, \forall q \geq n$,

$$C_{p+q}^n = \sum_{k=0}^{n} C_p^k C_q^{n-k} \ .$$

(Cette égalité est connue sous le nom d'égalité de Van der Monde.)

Exercice 9.27 a) Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^3 - 3X^2 + 4$.

Dans la suite de l'exercice, on considère la relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall Q \in \mathbb{R}[X], \qquad P \,\mathcal{R}\, Q \iff X^3 - 3X^2 + 4 | (P - Q).$$

b) Soient P et Q des polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que :

$$P \,\mathcal{R}\, Q \iff P(2) = Q(2), P'(2) = Q'(2) \text{ et } P(-1) = Q(-1).$$

c) Soient P et Q des polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que l'on a $P \,\mathcal{R}\, Q$ si et seulement si le reste de la division euclidienne de P par $X^3 - 3X^2 + 4$ est égal au reste de la division euclidienne de Q par $X^3 - 3X^2 + 4$.

d) $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}[X]$?

e) Soient P, Q, U, V des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P \,\mathcal{R}\, Q$ et $U \,\mathcal{R}\, V$. Montrer que $PU \,\mathcal{R}\, QV$.

Exercice 9.28 Montrer que le polynôme $P(X) = X^5 - X^2 + 1$ admet une unique racine réelle et que celle-ci est irrationnelle.

Exercice 9.29 Montrer que le polynôme $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ admet une racine multiple. Application : déterminer les racines du polynôme $3X^5 - 5X^4 + 5X - 3$.

Exercice 9.30 Soit $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1$. Vérifier que i est racine de P. En déduire alors la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 9.31 Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, démontrer que $X - a$ divise $X^n - a^n$.

Exercice 9.32 Prouver que B divise A, où :
$A = X^{3n+2} + X^{3m+1} + X^{3p}$ et $B = X^2 + X + 1$,
$A = (X+1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$ et $B = X(X+1)(2X+1)$,
$A = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ et $B = (X-1)^2$.

Exercice 9.33 Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe $S, T \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = S^2 + T^2$ (on utilisera la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$). *Indications :*

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, déterminer $c, d \in \mathbb{R}$ tels que : $ab = c^2 - d^2$, vérifier que $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2$.
2. Résoudre le problème pour P de degré 2.
3. Conclure.

Exercice 9.34 Pour quelles valeurs de a le polynôme $(X+1)^7 - X^7 - a$ admet-il une racine multiple réelle ?

Exercice 9.35 Soit P le polynôme $X^4 + 2X^2 + 1$. Déterminer les multiplicités des racines i et $-i$, de deux façons différentes : soit en décomposant P dans $\mathbb{C}[X]$, soit en utilisant le polynôme dérivé de P.

Exercice 9.36 Soit le polynôme $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.

1. Montrer que j est racine de ce polynôme. Déterminer son ordre de multiplicité.
2. Quelle conséquence peut-on tirer de la parité de P ?
3. Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 9.37 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples.

1. Montrer qu'il en est de même de P'.
2. Montrer que le polynôme $P^2 + 1$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

Exercice 9.38 [$X^2 - 2X\cos\theta + 1$ divise $X^{2n} - 2X^n\cos(n\theta) + 1$] Montrer que $X^2 - 2X\cos\theta + 1$ divise $X^{2n} - 2X^n\cos n\theta + 1$.

Exercice 9.39 Démontrer que $1 + X + X^n$ n'a que des racines simples.

Exercice 9.40 [Preuve du théorème de Gauss]

1. Lemme : Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $P(z_0) \neq 0$. Montrer que
$$\forall \varepsilon > 0, \exists z \in D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} |\, |z - z_0| \leq \varepsilon\}, |P(z)| < |P(z_0)|\,.$$
Indications : Ecrire $P(z_0 + h) = P(z_0) + \sum_{m=k}^{\deg P} \frac{h^m}{m!} P^{(m)}(z_0)$où k est le plus petit entier strictement positif tel que $P^{(i)}(z_0) \neq 0$.
On se propose de démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss : tout polynôme non constant à coefficients complexes admet une racine complexe.
2. Expliquer pourquoi le minimum de la fonction $z \to |P(z)|$ est atteint sur un disque centré en 0, mettons $D(0, \mathbb{R})$, et expliquer pourquoi :
$$\exists z_0 \in \mathbb{C}, |P(z_0)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|\,.$$
3. Montrer avec le lemme que $P(z_0) = 0$.

10 Sommes doubles

Exercice 10.1 *(échauffement)* Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Soit $n \in \mathbb{N}$. Parmi les sommes suivantes, lesquelles sont toujours égales (quels que soient l'entier n et la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$) ?

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i \quad ; \quad S_2 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \quad ; \quad S_3 = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} \quad ; \quad S_4 = \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} \quad ;$$

$$S_5 = \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} \quad ; \quad S_6 = \sum_{i=1}^{n} a_{n-i} \quad ; \quad S_7 = \sum_{i=n}^{2n-1} a_{2n-i} \quad ; \quad S_8 = \sum_{i=n+1}^{2n} a_{2n-i}.$$

Exercice 10.2 Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ une famille de réels indexée par $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Expliquer (informellement) ce que représentent les sommes suivantes et pourquoi elles sont égales.

$$S_1 = \sum_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,n\}} a_{i,j} \quad ; \quad S_2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \quad ; \quad S_3 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \quad ;$$

$$S_4 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1} a_{i,n-j} \quad ; \quad S_5 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1} a_{n+1-i,n-j}$$

Exercice 10.3 Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ une famille de réels indexée par $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Parmi les sommes suivantes, lesquelles sont toujours égales ?

$$S_1 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} a_{i,j} \quad ; \quad S_2 = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} a_{i,j} \quad ; \quad S_3 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} \quad ; \quad S_4 = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{i,j}$$

Exercice 10.4 Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ une famille de réels indexée par $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Expliquer (informellement) ce que représentent les sommes suivantes et pourquoi elles sont égales.

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k} a_{i,k-i} \quad ; \quad S_2 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} a_{i,j} \quad ; \quad S_3 = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n-j} a_{i,j}$$

Exercice 10.5 Soient $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ des suites de réels. Soit $n \in \mathbb{N}$. Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont toujours égales ?

$$S_1 = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} b_i\right) \quad ; \quad S_2 = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i \quad ; \quad S_3 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j$$

Exercice 10.6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$\sum_{1\le i,j\le n} \min(i,j) \quad \text{et} \quad \sum_{1\le i,j\le n} \max(i,j)$$

(on pourra montrer que la première somme est égale à $\sum_{k=1}^{n} k^2$).

11 Systèmes linéaires

Exercice 11.1 Déterminer le rang et l'ensemble des solutions des systèmes linéaires suivants.

$$1)\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 0 \end{array}\right. \qquad 2)\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & x_2 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 3 \end{array}\right. \qquad 3)\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 4x_2 & = & 10+2i \\ 2x_1 & + & (4+2i)x_2 & = & 6+2i \end{array}\right.$$

Exercice 11.2 Déterminer en fonction de la valeur des paramètres a et b le rang et l'ensemble des solutions des systèmes linéaires suivants.

$$1)\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & = & b \end{array}\right. \qquad 2)\left\{\begin{array}{rcrcl} 2ax_1 & + & ax_2 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & b \end{array}\right.$$

Exercice 11.3 Un système linéaire peut-il avoir exactement trois solutions ? Pourquoi ?

Exercice 11.4 Un système linéaire de n équations à n inconnues a-t-il toujours exactement une solution ? au moins une solution ? au plus une solution ?

Exercice 11.5 a) Considérons un système linéaire de 7 équations à 5 inconnues dont le rang est 4. Ce système a-t-il nécéssairement au moins une solution ? au plus une solution ? Ce système peut-il avoir une solution unique ?

b) Mêmes questions pour un système de 7 équations à 5 inconnues de rang 5

c) Mêmes questions pour un système de 5 équations à 7 inconnues de rang 4, puis pour un système de 5 équations à 7 inconnues de rang 5.

Exercice 11.6 Résoudre les systèmes linéaires figurant dans le polycopié sur les systèmes linéaires (i.e. pour vous entraîner, résoudre vous même les systèmes du polycopié, et ne vérifier en regardant les solutions qu'à la fin).

Exercice 11.7 Résoudre les systèmes suivants (pour les deux derniers, résoudre en fonction de la valeur des paramètres réels a, b et m).

$$1)\left\{\begin{array}{rrrcr} 2x & +y & +2z & = & 7 \\ x & +y & +z & = & 4 \\ -2x & +y & -2z & = & -4 \end{array}\right. \qquad 2)\left\{\begin{array}{rrrcr} 2x & +y & +2z & = & 7 \\ x & +y & +2z & = & 4 \\ -2x & +y & -z & = & -3 \end{array}\right.$$

$$3)\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & -2y & +3z & -4t & = & 4 \\ & y & -z & +t & = & -3 \\ x & +3y & & -3t & = & 1 \\ x & +2y & +z & -4t & = & 4 \end{array}\right.$$

$$4)\left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & +2z & = 1 \\ x & +2y & +z & = 2 \\ 3x & +4y & +5z & = a \\ & y & +3z & = b \end{array}\right. \qquad 5)\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & +(2m-1)z & = & 1 \\ mx & +y & +z & = & -1 \\ x & +my & +z & = & 3(m+1) \end{array}\right.$$

12 Matrices

12.1 Calculs élémentaires sur les matrices

Exercice 12.1 $(*)$ On donne les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, et $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Effectuer tous les produits de ces matrices deux à deux lorsqu'ils existent.

Exercice 12.2 $(*)$ Comparer AB et BA pour les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \\ 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Exercice 12.3 $(*)$ Soient A et B deux matrices. A quelle condition les matrices AB et BA existent-elles toutes les deux ? A quelle condition ont-elles le même format ?

Exercice 12.4 Soit $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ une matrice de $M_{n,1}$ et $X = (x_1, \ldots, x_n)$ une matrice de $M_{1,n}$. Vérifier que les deux produits UX et XU sont possibles et calculer les.

Exercice 12.5 $(*)$ Soit A une matrice de $M_{n,p}$.

a) Si I_n est la matrice unité d'ordre n, montrer que $I_nA = A$ puis que $AI_p = A$.

b) Soit E_{ij} la matrice élémentaire de M_n dont tous les coefficients valent 0, sauf celui situé sur la ligne i et la colonne j, qui vaut 1. Calculer $E_{ij}A$. On note ici F_{ij} la matrice élémentaire de M_p définie de manière analogue. Calculer AF_{ij}.

Exercice 12.6 a) Déterminer deux matrices A et B de $M_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } A - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Calculer AB et BA. A-t-on $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

Exercice 12.7 (Tous TD) **Puissance de matrice et formule du binôme :** Soit A une matrice de M_n. On définit les puissances de A par récurrence :

$$A^0 = I_n \ , \ A^1 = A \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}, \ \ A^{p+1} = A^pA = AA^p.$$

On dit que deux matrices A et B de M_n commutent si $AB = BA$. Montrer que si A et B commutent, la formule du binôme de Newton est vraie :

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k A^k B^{p-k} \ \text{ avec } \ C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}.$$

Exercice 12.8 $(*)$ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = A - I_3$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer J^n, puis A^n.

Exercice 12.9 (Tous TD) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 12.10 (Tous TD) Soient A et B deux matrices de M_n. Effectuer les produits :

$$(A+B)^2 \ , \ (A-B)(A+B) \ , \ (A-B)^2 \ , \ (AB)^2 \text{ et } (I + A + \ldots + A^k)(I - A).$$

Exercice 12.11 Soient A et B deux matrices de M_n triangulaires inférieures. Montrer que leur somme et leur produit sont aussi triangulaires inférieures.

Exercice 12.12 (**Cours**) Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée de M_n. On appelle trace de A, et on note $tr(A)$ le nombre réel :

$$tr(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

Montrer que : $\forall A \in M_n$, $\forall B \in M_n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$tr(A+B) = tr(A) + tr(B), \qquad tr(\lambda A) = \lambda tr(A), \qquad tr(AB) = tr(BA).$$

Exercice 12.13 Soient A et B deux matrices carrées réelles, de format $n \times n$, avec $tr(A) \neq -1$. Déterminer les matrices $X \in M_n(\mathbb{R})$ telles que

$$X + (tr(X))A = B \ .$$

Exercice 12.14 (Tous TD)

1) Soit X une matrice colonne à coefficient réels. Calculer $X^T X$. Montrer que $X^T X = 0$ si et seulement si $X = 0$.

2) Soit A une matrice à coefficient réels et X une matrice colonne à coefficient réels telle que le produit AX existe. Montrer que $AX = 0$ si et seulement si $X^T A^T A X = 0$.

3) Montrer qu'ainsi énoncé ces résultats sont faux pour des matrices à coefficients complexes. Comment peut-on les géneraliser au cas des matrices à coefficients complexes ?

Exercice 12.15 a) Montrer que, pour toute matrice A de $M_{n,p}$, les produits $A(A^T)$ et $(A^T)A$ sont des matrices carrées symétriques. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer AA^T et $A^T A$.

b) Montrer que toute matrice carrée B peut s'écrire de façon unique comme la somme d'une matrice symétrique S et d'une matrice antisymétrique T. Déterminer S et T si $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

12.2 Inverse de matrices

Exercice 12.16 $(*)$ La somme de deux matrices inversibles est-elle toujours inversible ?

Exercice 12.17 $(*)$ Déterminer l'inverse (quand il existe) des matrices suivantes par la méthode du pivot :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 12.18 a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Calculer A^2. En déduire que A n'est pas inversible. Calculer A^n pour tout entier naturel n.

b) Soit $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice N telle que : $B = I + N$, puis calculer $(I - N)(I + N)$. En déduire que B est inversible et calculer son inverse, puis B^{100}.

Exercice 12.19 (Tous TD) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

b) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

c) Déterminer en fonction de n et des termes initiaux les suites réelles (u_n) et (v_n) définies par u_0, v_0 et la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 5u_n - 2v_n \end{cases}$$

Exercice 12.20 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A^3 - 6A^2 + 12A$.

b) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 12.21 Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On note I la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$, et 0 la matrice nulle de $M_n(\mathbb{R})$.

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A^2 + A + I = 0.$$

a) Montrer que A est inversible et que $A^{-1} = -A - I$.

b) Montrer que $A^3 = I$.

c) Calculer, pour tout p de $\mathbb{N}^*$, A^p en fonction de A et I.

Exercice 12.22 (Tous TD) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^2 puis A^3.

b) A est-elle inversible ?

c) On note I la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$. En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer $(A + I)^{10}$.

d) On considère les suites les suites réelles (u_n), (v_n) et w_n définies par u_0, v_0 et w_0 et par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 2v_n + w_n \\ w_{n+1} = v_n \end{cases}$$

Calculer v_{10} quand $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $w_0 = -1$.

Exercice 12.23 *(suite des noyaux)* Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$. On pose appelle noyau de A et on note $KerA$ l'ensemble des vecteurs colonnes X à n composantes tels que $AX = 0$:

$$KerA = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), AX = 0\}$$

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que pour tout k dans $\mathbb{N}$, $Ker(A^k) \subset Ker(A^{k+1})$.

2) Soit k un entier naturel tel que $Ker(A^{k+1}) = Ker(A^k)$. Montrer que pour tout entier $q \geq k$, $Ker(A^q) = Ker(A^k)$.

3) En déduire que si pour tout X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $A^2X = 0 \Leftrightarrow AX = 0$, alors pour tout entier $k \geq 1$ et pour tout X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $A^kX \Leftrightarrow AX = 0$.

Exercice 12.24 *(racines carrés de matrices)* Définition : Soit A et M des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On dit que M est une racine carrée de A si M^2 est bien définie et $M^2 = A$.

a) Soit M une matrice. Montrer que le produit MM n'est défini que si M est une matrice carrée. En déduire que si une matrice A a une racine carrée (ou cubique d'ailleurs), alors A est carrée.

b) Montrer que la matrice suivante n'a aucune racine carrée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'a aucune racine carrée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mais a exactement deux racines carrées dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

d) Dans $M_2(\mathbb{R})$, montrer que la matrice I_2 a une infinité de racines carrées dont les coefficients diagonaux sont nuls.

e) Déterminer toutes les racines carrées de la matrice I_2 dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Donner un exemple de racine carrées de I_2 dans $M_2(\mathbb{C})$ qui n'appartient pas à $M_2(\mathbb{R})$.

Ce qu'il faut retenir de cet exercice, c'est que dans le monde des matrices il faut se méfier de ses réflexes.

Exercice 12.25 On considère des matrices à coefficients réels. Soit A une matrice $n \times p$. On appelle noyau de A l'ensemble des matrices colonnes $X \in \mathcal{M}_{p,1}$ telles que $AX = 0$. On appelle image de A l'ensemble des matrices colonnes $B \in \mathcal{M}_{n,1}$ telles que le système linéaire $AX = B$ ait au moins une solution. Déterminer le noyau et l'image des matrices suivantes. A chaque fois, calculer la somme du nombre de "degrés de liberté" du noyau et de l'image et comparer avec le nombre de colonnes de A. Que constatez-vous ?

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad 2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 4) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 6) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 7) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 12.26 Pour les matrices carrées A de l'exercice précédent (donc toutes sauf la 7)), déterminer les réels λ tels que le système linéaire $AX = \lambda X$ ait (au moins) une solution X non nulle. Pour chacune de ces valeurs de λ, résoudre le système $AX = \lambda X$.

12.3 Variations sur une erreur courante

Exercice 12.27 Soient A et B les matrices suivantes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Calculer A^2 et B^2.
2) Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $AX = 0 \Leftrightarrow BX = 0$.
3) A-t-on pour tout $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $A^2X = 0 \Leftrightarrow B^2X = 0$?

Exercice 12.28 Soient A et B les matrices suivantes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Calculer A^2 et B^2.
2) Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $A^2X = 0 \Leftrightarrow B^2X = 0$.
3) A-t-on pour tout $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $AX = 0 \Leftrightarrow BX = 0$?

Exercice 12.29 Soient A, B, C les matrices suivantes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que B et C sont inversibles et calculer leur inverses.
2) Calculer AB et AC.
3) Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $BX = 0 \Leftrightarrow CX = 0$.
4) A-t-on pour tout $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $ABX = 0 \Leftrightarrow ACX = 0$.

Exercice 12.30 Soient A et B, C les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer AB, AC, B^2, C^2.
2) Montrer que pour tout X dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $BX = 0 \Leftrightarrow CX = 0$.
3) Est-il vrai que pour tout X dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:
a) $ABX = 0 \Leftrightarrow ACX = 0$?
b) $B^2X = O \Leftrightarrow C^2X = 0$?

Exercice 12.31 Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Soient A, B, C des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soient (i) et (ii) les propositions suivantes :
(i) Pour tout vecteur colonne X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $BX = 0 \Leftrightarrow CX = 0$.
(ii) Pour tout vecteur colonne X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $ABX = 0 \Leftrightarrow ACX = 0$.
1) Montrer que si A est inversible, alors $(i) \Leftrightarrow (ii)$.
2) Est-ce forcément le cas si A n'est pas inversible ? Si oui, le prouver. Sinon, donner un contre-exemple.

12.4 Exercices de l'examen 2002

Exercice 12.32 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ telle que $ad - bc = 0$.
On note $s = a + d$. Soit B la matrice de $M_2(\mathbb{R})$ telle que $A + B = sI_2$.

1) Calculer le produit matriciel AB.

2) En déduire que $A^2 = sA$, et calculer pour tout n de $\mathbb{N}^*$ la matrice A^n.

3) Calculer B^n pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Exercice 12.33 Soient n dans $\mathbb{N}^*$ et A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ non nulle (c'est-à-dire différente de la matrice nulle) et symétrique.

1) Montrer que A^2 est symétrique.

2) Exprimer les coefficients de A^2 en fonction de ceux de A.

3) Montrer que la trace de A^2 est strictement positive, puis en déduire que A^2 est non nulle.

4) Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}^*$, A^k est non nulle.